Primeira Prova de Teoria Eletromagnética I, 05/09/2011

Nome: GABARITO

(1ª questão) *(1,0 ponto)* Mostre que:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = 4\,\pi\,\delta^3(\vec{r})\,.$$

(2ª questão) Considere uma esfera isolante de raio R centrada na origem e com densidade volumétrica uniforme de carga ρ. Em seu interior, temos duas cavidades esféricas idênticas dispostas conforme esquema da figura 1. As cavidades estão centradas no plano XY.

(a) *(1,5 pontos)* Determine o vetor campo elétrico sobre o eixo Y em um ponto $(0, y, 0)$ externo à esfera.

(b) *(1,5 pontos)* Determine o vetor campo elétrico no centro da cavidade pertecente ao semi-eixo X positivo (cavidade da direita).

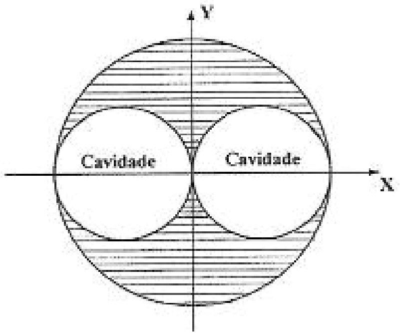


Figura 1: (2ª questão)

(3ª questão) Duas cavidades esféricas de raios a e b são escavadas no interior de uma esfera condutora (neutra) de raio R, conforme a figura 2. No centro de cada cavidade é colocada uma carga pontual. A carga dentro da cavidade de raio a é q_a e a caraga no interior da cavidade de raio b é q_b.

(a) *(1,0 ponto)* Determine as densidades superficiais de carga sobre as paredes das cavidades e sobre a superfície do condutor.

(b) *(1,0 ponto)* Determine o vetor campo elétrico fora do condutor.

(c) *(1,0 ponto)* Determine a força elétrica sobre as cargas q_a e q_b.

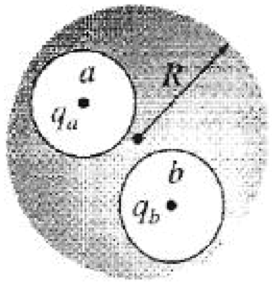


Figura 2: (3ª questão)

(4ª questão) Considere um capacitor composto por duas cascas metálicas esféricas concêntricas, com raios dados por a e b, conforme a figura 3. A casca de raio a está carregada com carga $+Q$ e a casca de raio b está carregada com carga $-Q$.

(a) *(1,0 ponto)* Determine o vetor campo elétrico gerado pelo conjunto das duas cascas nas regiões interna e externa às cascas.

(b) *(1,0 ponto)* Calcule a energia eletrostática desta configuração usando a relação entre energia e campo elétrico.

(c) *(1,0 ponto)* Determine a capacitância C desse capacitor e mostre que a energia eletrostática obtida no item (b) pode ser escrita como $W = Q^2/(2C)$.

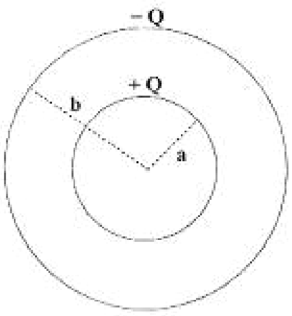


Figura 3: (4ª questão)

PRIMEIRA PROVA DE ELETRO – 2011/2

GABARITO

(1ª Questão)

Aplicando o divergente em coordenadas esféricas:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\cancel{r^2}\,\frac{1}{\cancel{r^2}}\right) = 0 \quad (r \neq 0)$$

Por outro lado, integrando $\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right)$ em um volume esférico de raio R, obtemos:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) d\tau' = \oint_S \frac{\hat{r}}{R^2}\cdot\hat{r}\, da' = \iint \frac{1}{\cancel{R^2}}\cancel{R^2}\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi = 4\pi$$

Note que esse resultado vale p/ qualquer R (não importa o quão pequeno). Portanto, $\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right)$ deve ser nulo p/ $r \neq 0$ e singular na origem, o que sugere $\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) \propto \delta^3(\vec{r})$. Além disso, sua integral no volume V resulta em 4π, o que nos leva então ao resultado:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 4\pi\,\delta^3(\vec{r})}$$

De fato: $\int_V \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) d\tau' = \int_V 4\pi\,\delta^3(\vec{r})\, d\tau' = 4\pi$.

(2ª Questão)

Aplicando o princípio da superposição, podemos obter $\vec{E}$ fazendo:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

Onde $\vec{E}_1 \longrightarrow$ Campo de uma esfera sólida (sem cavidades) com densidade ρ.

$\vec{E}_2 \longrightarrow$ Campo de uma esfera sólida de densidade $-\rho$ na posição da cavidade esquerda (semi-eixo negativo de x).

$\vec{E}_3 \longrightarrow$ Campo de uma esfera sólida de densidade $-\rho$ na posição da cavidade direita (semi-eixo positivo de x).

(a) Pelo teorema da casca, o campo elétrico em um ponto externo às esferas será dado pela superposição de campos de cargas pontuais. Assim, para um ponto $(0, y, 0)$ teremos:

$$\vec{E} = \frac{1}{\cancel{4}\pi\varepsilon_0}\left[\rho\frac{\cancel{4}}{3}\pi R^3\frac{(y\hat{j}-\vec{0})}{y^3} - \rho\frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{8}\frac{(y\hat{j}+\cancel{\frac{R}{2}\hat{i}})}{(y^2+R^2/4)^{3/2}} - \rho\frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{8}\frac{(y\hat{j}-\cancel{\frac{R}{2}\hat{i}})}{(y^2+R^2/4)^{3/2}}\right]$$

(onde usamos que $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{3} q\frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$)

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left[\frac{y\hat{j}}{y^3} - \frac{2y\hat{j}}{8(y^2+R^2/4)^{3/2}}\right] \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho y R^3}{3\varepsilon_0}\left[\frac{1}{y^3} - \frac{1}{4(y^2+R^2/4)^{3/2}}\right]\hat{j}}$$

(b) No centro da cavidade pertencente ao semi-eixo x positivo teremos:

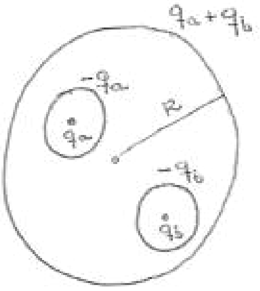
$$\vec{E}_1 = \frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\rho\frac{\cancel{4\pi}}{3}\frac{\cancel{R^3}}{\cancel{8}}\frac{(\frac{R}{2}\hat{i}-\vec{0})}{\cancel{R^3/8}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R}{2}\hat{i}\ ;\ \vec{E}_2 = \frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}(-\rho)\frac{\cancel{4\pi}}{3}\frac{\cancel{R^3}}{8}\frac{(\frac{R}{2}\hat{i}+\frac{R}{2}\hat{i})}{\cancel{R^3}} = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R}{8}\hat{i}$$

Para $\vec{E}_3$ obtemos: $\vec{E}_3 = \vec{0}$.

Assim: $\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{R}{2} - \frac{R}{8}\right]\hat{i} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho R\hat{i}}{8\varepsilon_0}}$

(3ª Questão)

(a)



Densidades: Visto que as cavidades são esféricas teremos densidades uniformes. Assim:

$$\boxed{\sigma_a = \frac{-q_a}{4\pi a^2} \quad ; \quad \sigma_b = -\frac{q_b}{4\pi b^2} \quad ; \quad \sigma_R = \frac{q_a+q_b}{4\pi R^2}}$$

(b) As cargas no interior das cavidades estão blindadas pelas cargas induzidas nas paredes das cavidades. Assim, resta-nos as cargas induzidas na superfície do condutor. Sendo o condutor esférico, o campo fora será o campo de uma carga pontual (q_a+q_b) na origem:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(q_a+q_b)}{r^2}\,\hat{r}}$$

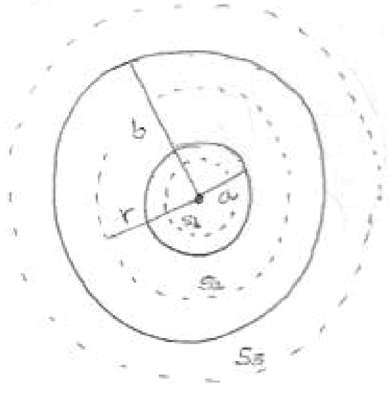
(c) Note que não há campo sobre q_a ou q_b:

- A esfera condutora não exercerá campo em seu interior.
- As cargas q_a e q_b exercem campo dentro de suas próprias cavidades mas não em si próprias.
- As cargas q_a e q_b não exercem campo na outra cavidade pois estão blindadas pelas cargas induzidas na borda de sua própria cavidade

Logo, $\vec{F} = q\vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = \vec{0}}$ (Força sobre q_a ou q_b é nula!)

(4ª Questão)

(a)



(S_1, S_2 e S_3 são superfícies gaussianas)

$\underline{\underline{r<a}}$: $\oint_{S_1} \vec{E}\cdot\hat{n}\,da = \cancel{\frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}}^{\,0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}=\vec{0}}$ $(r<a)$

$\underline{\underline{a<r<b}}$: $\oint_{S_2} \vec{E}\cdot\hat{n}\,da = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}} \quad (a<r<b)$$

$\underline{\underline{r>b}}$: $\oint_{S_3} \vec{E}\cdot\hat{n}\,da = \cancel{\frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}}^{\,0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}=\vec{0}}$ $(r>b)$

(b) $W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\substack{\text{TODO O}\\ \text{ESPAÇO}}} E^2\,d\tau'$. No entanto, $\vec{E}$ é não-nulo apenas entre as cascas. Logo: $W = \frac{\varepsilon_0}{2}4\pi\int_a^b \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\right)^2 r^2\,dr$

$$\Rightarrow W = \frac{\cancel{\varepsilon_0}}{2}\cancel{4\pi}\frac{Q^2}{(4\pi)^{\cancel{2}}\varepsilon_0^{\cancel{2}}}\int_a^b \frac{1}{r^2}dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_a^b \Rightarrow \boxed{W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$$

(c) Diferença de potencial entre as cascas: $V = -\int_{(-)}^{(+)}\vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^a \frac{1}{r^2}dr$

$$\Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$ Mas $C = \frac{Q}{V} \Rightarrow \boxed{C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)} = 4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}}$

Do item (b) temos: $W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{2}Q^2\underbrace{\frac{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{4\pi\varepsilon_0}}_{1/C} \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$